SEMINÁŘ Z MATEMATICKÉHO MODELOVÁNÍ

„UČEBNÍ TEXT VZNIKL VE SPOLUPRÁCI S FSS A PODLE TOHO TAKY VYPADÁ."

ČASOVÁ ŠKÁLA $(\mathbb{T}; <; \nu)$

MEASURE CHAIN

$< \subseteq \mathbb{T}^2 \qquad \nu : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$

A1) $<$ JE ASYMETRICKÁ $\quad t_1 < t_2 \Rightarrow \neg(t_2 < t_1)$

JE TRANZITIVNÍ $\quad t_1 < t_2 \wedge t_2 < t_3 \Rightarrow t_1 < t_3$

JE ÚPLNÁ $\quad t_1 \neq t_2 \Rightarrow t_1 < t_2 \vee t_2 < t_1$

A2) $(\forall t \in \mathbb{T}) \quad \{s \in \mathbb{T};\ t < s\} \neq \emptyset \Rightarrow \sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : t < s\} \in \mathbb{T}$ $\quad$ SHIFT $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ ČASOVÝ KROK VPŘED

$(\forall t \in \mathbb{T}) \quad \{s \in \mathbb{T};\ s < t\} \neq \emptyset \Rightarrow \rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\} \in \mathbb{T}$ $\quad \rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ ČASOVÝ KROK VZAD

A3) ν JE SPOJITÁ   SLOŽITĚJŠÍ DEFINICE PŘES OKOLÍ BODU – $\mathbb{T}$ NEMUSÍ BÝT $\mathbb{R}$

ν JE SILNĚ IZOTONNÍ $\quad t_1 < t_2 \Rightarrow \nu(t_1; t_2) > 0$

ν LZE SČÍTAT $\quad \nu(t_1; t_3) = \nu(t_1; t_2) + \nu(t_2; t_3)$ PRO $t_1 < t_2 \Rightarrow \nu(t_2; t_1) > 0$

ZRNITOST $\mathbb{T}$ ČASU

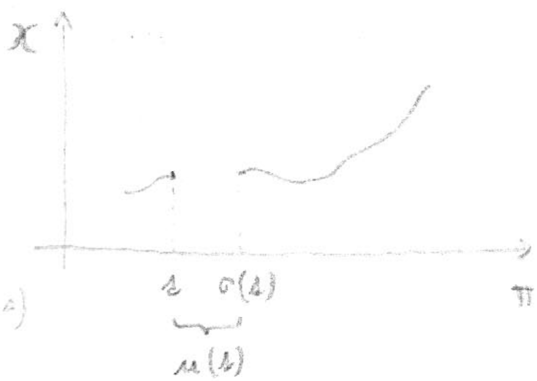
FUNKCE $\mu : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$

$\mu(t) = \nu(\sigma(t); t)$ MŮŽE BÝT 0 U SPOJITÉHO ČASU

ABYCHOM MOHLI POSUZOVAT ZMĚNU NEBO SAMOTNOU EXISTENCI NĚČEHO, MUSÍME VYTVOŘIT FUNKCI ZÁVISLOU NA ČASU

$x : \mathbb{T} \to \mathcal{X}$ BANACHŮV PROSTOR

$$x^{\Delta}(t) = \begin{cases} \dfrac{x(\sigma(t)) - x(t)}{\mu(t)} & \text{PRO } \mu(t) > 0 \\[2ex] \lim\limits_{s \to t} \dfrac{x(\sigma(t)) - x(t)}{\sigma(t) - s} & \text{PRO } \mu(t) = 0 \end{cases}$$



DIFERENCE A DERIVACE (VHODNÁ [illegible])

OBJEKT, STAVOVÉ PROMĚNNÉ

$I \subseteq \mathbb{T}$ ČASOVÝ INTERVAL   POZOROVANÝ OBJEKT URČITÝM ZPŮSOBEM ODPOVÍDÁ NA PŮSOBENÍ

$e : I \to \mathcal{E}$ POZOROVANÝ JEV KVANTIFIKUJEME (STIMULY, EXCITACE)

$r : I \to \mathcal{R}$ ODPOVĚĎ OBJEKTU (ODEZVA, RESPONSE)

$y_I = \{(t; y(t)) : t \in I\}$ PRO $y : \mathbb{T} \to \mathcal{Y}$

$O = \{ e_I ; r_I \}$ OBJEKT – JEHO REAKCE NA PODNĚTY V ČASE

PODNĚTY, REAKCE } V ČASE

MNOŽINA VŠECH PODMNOŽIN PODNĚTŮ (EXCITACÍ)

MNOŽINA VŠECH PODMNOŽIN REAKCÍ

O JE DETERMINOVANÝ, POKUD $\exists$ FCE $\varphi : 2^{T \times E} \to 2^{T \times R}$

NEBOLI $r_I = \varphi(e_I)$

NALEZENÍ FCE φ JE CÍLEM MATEMATICKÉHO MODELOVÁNÍ

ZJEDNODUŠENÍ: $\psi : \mathcal{E} \to \mathcal{R}$ $\quad r(t) = \psi(e(t))$ ALE REAKCE ① NEZÁVISÍ JEN NA PŘÍTOMNOSTI ② NENÍ OKAMŽITÁ

JE ALE TŘEBA ZAVÉST DALŠÍ – STAVOVÉ – PROMĚNNÉ, NA NICHŽ MŮŽE ODEZVA ZÁVISET.

OBJEKT KORUNA, STIMULUS HOD KORUNOU, ODEZVA JE, NA JAKOU STRANU MINCE PADNE. FILOZOFICKOU OTÁZKOU JEST, ZDA JSME SCHOPNI ZE ZNALOSTI STIMULU URČIT ODEZVU...

STAVOVÉ PROMĚNNÉ $x : \mathbb{T} \times \Omega \to \mathcal{X}$ KDE Ω JE PRAVDĚPODOBNOSTNÍ PROSTOR

1. STIMULUS-STATE-RESPONSE FUNCTION $G : \mathcal{X} \times \mathcal{E} \to \mathcal{R}$

$$r(t) = G(x(t); e(t))$$

ODEZVA ZÁLEŽÍ NA STAVU $x(t)$ OBJEKTU

POKUD JE STAV POZOROVATELNÝ, LZE STANOVIT $r(t) = x(t)$

2. PŘECHODOVÁ FUNKCE STATE-TRANSITION FUNCTION $F : \mathcal{X}^{\mathbb{T}} \times \mathcal{E}^{\mathbb{T}} \to \mathcal{X}$

$$x^{\Delta}(t) = F(x_{I_t}; e_{I_t})$$

MATEMATICKÝ MODEL VÝVOJE OBJEKTU

TEDY MODEL TVOŘÍ ROVNICE: $r(t) = G(x(t), e(t))$ A $x^{\Delta}(t) = F(x_{I_t}; e_{I_t})$

KLASIFIKACE MODELŮ: DLE CHOVÁNÍ V ČASE: STATICKÉ $F \equiv 0$

DYNAMICKÉ OSTATNÍ

PODE VZTAHU K OKOLÍ: AUTONOMNÍ STAV NEZÁVISÍ NA OKOLÍ. F JE KONSTANTNÍ V e_{I_t}. ZÁVISÍ NAPŘ. JEN NA ČASE

NEAUTONOMNÍ

PODLE ZÁVISLOSTI NA NÁHODĚ: DETERMINISTICKÉ NEZÁVISÍ NA NÁHODĚ

$$\sup \{ \| var\, x(t) \| : t \in \mathbb{T} \} = 0$$

STOCHASTICKÉ

PODLE $\mathbb{T}$: SPOJITÉ V ČASE

$$\sup \{ \mu(t) : t \in \mathbb{T} \} = 0$$

DISKRÉTNÍ

$$\inf \{ \mu(t) : t \in \mathbb{T} \} > 0$$

OSTATNÍ – OSTATNÍ NAPŘ. VÝVOJ ČLENOVCŮ

DALŠÍ KLASIFIKACE MŮŽE ZÁVISET NA ZMĚNĚ MODELU (VÝRAZNÉ ZMĚNĚ PODMÍNEK) ZÁVISLOSTI, KTERÉ MAJÍ PLATIT NEPLATÍ.

TEDY ZDA INTERVAL I_t ZÁVISÍ NA t A NEZÁVISÍ NA t.

PODE PAMĚTI: SYSTÉMY S PAMĚTÍ (SE ZPOŽDĚNÍM)

$$\inf (I_t) < t$$

PŘEDVÍDÁNÍ BUDOUCNOSTI

SYSTÉMY BEZ PAMĚTI – OSTATNÍ

PODLE OČEKÁVÁNÍ: ANTICIPATIVNÍ, NEANTICIPATIVNÍ } OBDOBNĚ $\sup (I_t) > t$

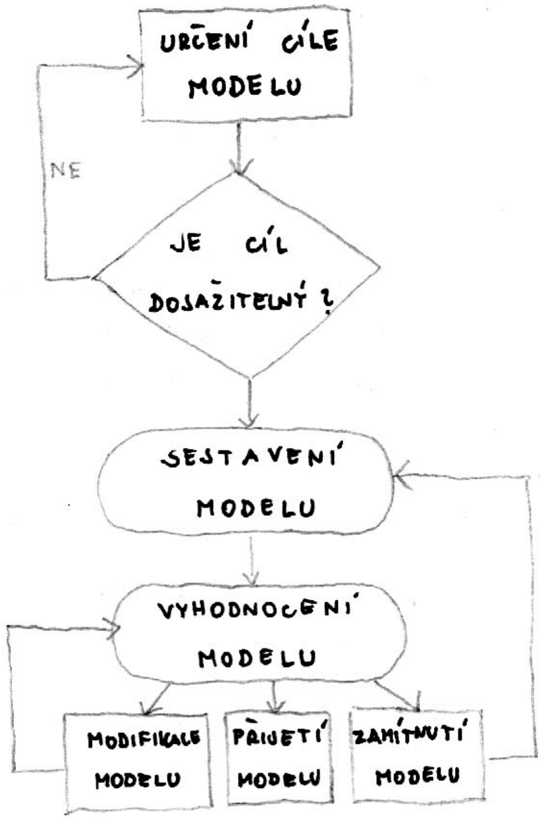
STIMULUS - STATE - RESPONSE FUNCTION $r(t) = G(x(t), e(t))$

PŘECHODOVÁ FUNKCE $x^{\Delta}(t) = F(x_{I_t}, e_{I_t})$

ANATOMIE MODELŮ

1. STAVOVÉ PROMĚNNÉ (TÉŽ FÁZOVÉ, SYSTÉMOVÉ) V KONEČNĚDIMENZIONÁLNÍM PROSTORU
2. PŘECHODOVÁ FUNKCE - UDÁVÁ ZÁVISLOST ZMĚNY STAVOVÝCH PROMĚNNÝCH NA SYSTÉMOVÝCH PROMĚNNÝCH A NA VLIVECH PŮSOBÍCÍCH NA PROSTOR
3. PARAMETRY SYSTÉMU - VŠECHNO OSTATNÍ V MODELU - OBVYKLE $\in \mathbb{R}$ A JEJICH VEKTORY
4. VYMEZUJÍCÍ FUNKCE (FORCING FUNCTIONS) - VČETNĚ POČÁTEČNÍCH PODMÍNEK

PROCES MODELOVÁNÍ



URČENÍ CÍLE:

TEORETICKÝ CÍL - SPÍŠE KVALITATIVNÍ - PRO POCHOPENÍ PROBLÉMU A JEHO STRUČNÝ POPIS

PTOLEMAIOS × KOPERNÍK

PRAKTICKÝ CÍL - POŽADUJEME PŘESNOST PRO PREDIKCI, OVLÁDNUTÍ, VYUŽITÍ APOD. JEVU

MODELY HDP — EXPLIKATIVNÍ MODEL - VYSVĚTLUJE, POUŽÍVÁ REÁLNÉ SLOŽKY

MENDEL - GEN — DESKRIPTIVNÍ MODEL - POPISUJE JEVY, ČASTO VIRTUÁLNÉ

SESTAVENÍ MODELU:

NEOHRANIČENÉ POLE PŮSOBNOSTI PRO PSYCHOLOGY A PODOBNÉ EXISTENCE

MENTÁLNÍ MODEL - POCHOPENÍ REALITY

↓

POJMOVÝ MODEL - POJMENOVÁNÍ KVANTIFIKOVATELNÝCH JEVŮ A PROCESŮ
- KONSTANTY A PROMĚNNÉ
- STAVY A VNĚJŠÍ VLIVY

ENDOGENNÍ EXOGENNÍ VELIČINY

↓

PŘEDMODEL (DIAGRAM, SCHÉMA) - VZTAHY MEZI SLOŽKAMI

↓

REPREZENTACE MODELU - MATEMATICKY NEBO JINAK

↓

POČÍTAČOVÝ PROGRAM - NEPOVINNÉ

PŘÍČINNÝ SMYČKOVÝ DIAGRAM (CASUAL LOOP DIAGRAM - CLD)

HRANOVĚ

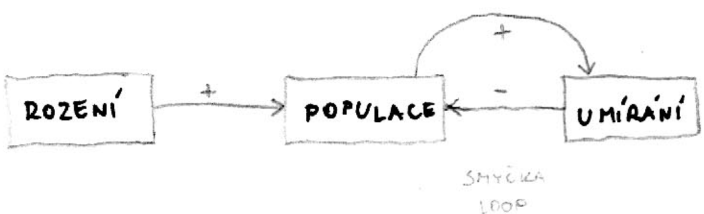
OHODNOCENÝ ORIENTOVANÝ GRAF: VRCHOLY = SLOŽKY SYSTÉMU

HRANY = VLIVY MEZI SLOŽKAMI

OHODNOCENÍ: +1 ... ZESILUJÍCÍ VLIV

−1 ... ZESLABUJÍCÍ VLIV

Př: MODEL POPULACE - VELMI ZJEDNODUŠENÝ



SYSTÉMY OBSAHUJÍCÍ SMYČKU NAZVEME NELINEÁRNÍMI.

SMYČKOU JE PRO TYTO ÚČELY JAKÁKOLIV KRUŽNICE V GRAFU. ZESILUJÍCÍ SMYČKOU NAZVEME TAKOVOU SMYČKU, V NÍŽ JE POČET ZÁPORNÝCH HRAN NULOVÝ ČI SUDÝ.

REPREZENTACE MODELU: MATEMATICKY

Př: STAVOVÁ PROMĚNNÁ $x = x(t)$ VYJADŘUJE MNOŽSTVÍ JEDINCŮ NA JEDNOTCE PLOCHY.

PARAMETRY a, b VYJADŘUJÍ POČTY NOVÝCH / ZEMŘELÝCH JEDINCŮ ZA ČAS NA JEDNOTCE PLOCHY.

a ZÁVISÍ NA VELIKOSTI POPULACE A PORODNOSTI α
b ZÁVISÍ NA VELIKOSTI POPULACE A ÚMRTNOSTI β

ŘEKNĚME, ŽE $a = \alpha x$ A OBDOBNĚ $b = \beta x$

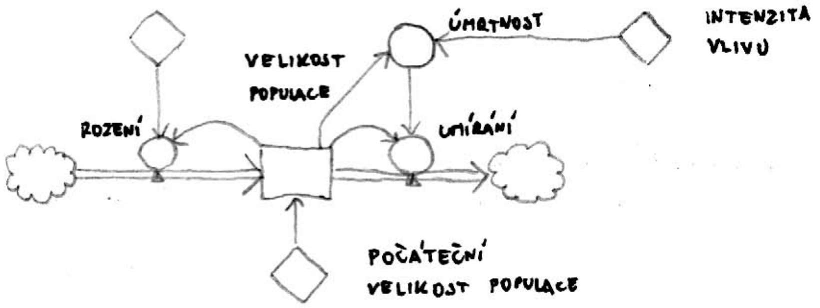
A DÁLE $\exists$ PARAMETR γ ... INTENZITA OVLIVNĚNÍ ÚMRTNOSTI VELIKOSTÍ POPULACE.

ZBÝVÁ SESTAVIT PŘECHODOVOU RCI:

$$x^{\Delta}(t) = a - b \qquad x(0) = x_0$$
$$= \boxed{\alpha x - \gamma x^2}$$

PIKTOGRAMICKY - STAVOVÉ PROMĚNNÉ ▭ (AKUMULACE, ÚROVEŇ, HLADINA, LEVEL)
TYP STELLA - TOKY ⟹ ODTOK (ZÁPORNÝ TOK) VS. PŘÍTOK
- POMOCNÉ PROMĚNNÉ ◯ PARAMETRY A VYMEZUJÍCÍ FCE
- KONSTANTA ◇ VOLNÝ PARAMETR
- SPOJ ⟶ VYJADŘUJE ZÁVISLOSTI VELIČIN
- OBLÁČEK NEZNÁMÁ VELIČINA

Př:



VYHODNOCENÍ MODELU: ANALÝZA MODELU
- MATEMATICKÁ
- PROVEDENÍM SIMULACE

IDENTIFIKACE MODELU

FALZIFIKACE MODELU - PROVEDOU SE PREDIKCE A SROVNAJÍ SE S REALITOU, POKUD NESOUHLASÍ, JE MODEL FALZIFIKOVÁN.

MODELY SE DĚLÍ NA DVĚ SKUPINY - TY, U KTERÝCH SE PODAŘILO PROKÁZAT, ŽE JSOU ŠPATNĚ A TY, U KTERÝCH SE TO ZATÍM NEPODAŘILO!